Exercice 1 *Déclic, Exercice 91 page 179*

1° a) La feuille de carton a des côtés de longueur 30 cm, donc comme on rabat une longueur x de chaque côté, on doit avoir $2x < 30$, c'est à dire $x < 15$. Par ailleurs $x > 0$ pour avoir une bordure non nulle. Donc on doit avoir $x \in]0;15[$.

b) Le volume est le produit de la hauteur par l'aire de la base donc : $V = x \times (30-2x)^2 = x(900-120x+4x^2) = 4x^3-120x^2+900x$.

2° a) On calcule la (fonction) dérivée : $f'(x) = 12x^2 - 240x + 900$. Pour étudier le signe de la dérivée, calculons le discriminant $\Delta = (-240)^2 - 4 \times 12 \times 900 = 14400$. Il y a donc deux racines $x_1 = \frac{240-\sqrt{14400}}{2\times 12} = 5$ et $x_2 = \frac{240+\sqrt{14400}}{2\times 12} = 15$. Le coefficient $a = 12$ est strictement positif, donc le polynôme est négatif si x est entre les racines. On peut alors dresser le tableau de variation (en réalité pour le volume de la boîte, $x \in]0;15[$) :

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	2000	$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	0		5		15
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$V(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	2000	$\searrow$	$\|\|$

b) D'après le tableau de variation ci-dessus, le maximum est atteint pour $x = 5$. Le volume maximal est $V = 2000$ cm^3.

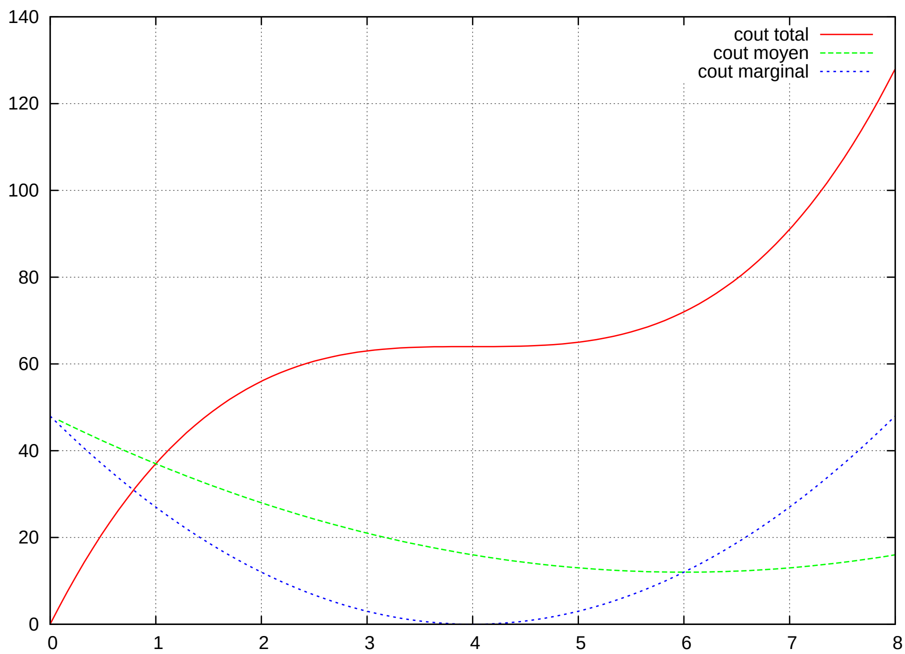
Exercice 2 *Déclic, Exercice 99 page 181*

1° a) Le coût marginal est $C'(q) = 3q^2 - 24q + 48 = 3(q^2 - 8q + 16) = 3(q-4)^2$. C'est une fonction de de second degré en q. D'après la factorisation ci-dessus son signe est toujours positif (le discriminant est $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 48 = 0$). Le sens de variation de C est donc (toujours) croissante.

b) Le coût moyen est $CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3-12q^2+48q}{q} = q^2 - 12q + 48$. C'est une fonction de second degré, sa courbe est une parabole orientée vers les y positifs. Le discriminant est $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 48 = -48$, donc strictement négatif, donc $CM(q)$ ne s'annule jamais. Le sommet de la parabole, c'est à dire le minimum de $CM(q)$ est atteint pour $q = -\frac{-12}{2\times 1} = 6$.

c) La fonction dérivée de CM est $CM'(q) = 2q - 12$. Cette dérivée est négative pour $q \in]-\infty;6[$ et positive sinon. Elle s'annule pour $q = 6$. Elle correspond à un minimum car la dérivée s'annule et change de signe au passage de $q = 6$. Or, pour $q = 6$, $CM(6) = 6^2 - 12 \times 6 + 48 = 12$ et $C'(6) = 3 \times 6^2 - 24 \times 6 + 48 = 12$. Donc on a bien $CM(6) = C'(6)$.

d) Les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et Γ :



2° a) Le coût marginal est $C'(q) = 3(q-4)^2$ qui est une fonction associée à la fonction carré. Sa courbe s'obtient à partir de la fonction carré par une translation de vecteur $+4\vec{i}$. Le minimum est pour $q_0 = 4$ et la valeur du minimum est 0. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ est $y = C'(4)(x-4)+c54)$. Comme $C'(4) = 0$ et $C(4) = 64$, ceci se réduit à $y = 64$.

b) La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de sa tangente $\mathcal{T}$ si $q \in [0;4]$ et au-dessus de celle-ci sinon (on peut remarquer que en $q = 4$, la dérivée de C s'annule, mais $q = 4$ n'est pas un extremum) .

c) Voir figure précédente.

3° a) Le coût moyen $CM(q)$ est le taux d'accroissement de C entre 0 et q. Pour trouver son minimum, on cherche parmi les droites (OM) passant par O et $M \in \mathscr{C}$, la droite (OM) qui a la pente la plus petite : c'est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par O. On retrouve la droite qui passe par O et le point d'abscisse $q = 6$.

b) L'équation réduite de la tangente est $y = C'(6)(q-6)+C(6) = 12(q-6)+72 = 12q$. Donc l'équation de la tangente est $y = 12q$. On voit bien qu'elle passe par O.