

Chapitre 1

RUDIMENTS DE LOGIQUE ET RAISONNEMENT

La logique est un ensemble de règles et d'outils permettant de faire des raisonnements corrects. On peut la considérer comme la *grammaire du raisonnement*. C'est une discipline à l'intersection des mathématiques et de la philosophie. Plus récemment, une dimension informatique vient de se rajouter, depuis les circuits logiques de l'électronique jusqu'à l'intelligence artificielle, en passant par la programmation logique.

§1 Propositions et valeurs de vérité

§1.1 Propositions

Une *proposition* est une phrase, grammaticalement correcte, à laquelle on puisse attribuer une valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F). En particulier une proposition doit contenir un *verbe*.

Exemple 1. Par mi les phrases suivantes, lesquelles sont des propositions ?

- (a) Il pleut sur Grenoble actuellement
- (b) La porte de la classe est fermée
- (c) Ferme la porte, s'il te plaît
- (d) Prenez-vous un café ou un dessert ?
- (e) La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- (f) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x est plus grand
- (g) La fonction inverse est strictement décroissante

§1.2 Valeurs de vérité

La logique classique (formalisée par Aristote) est basée sur deux principes admis

Principe du tiers-exclu on admet uniquement deux valeurs de vérité : vrai (V) ou faux (F). Donc une proposition est soit vraie, soit fausse, il n'y a pas d'autres possibilités.

Principe de non contradiction Une proposition ne peut-être vraie et fausse. Elle est donc soit vraie soit fausse.

REMARQUE 1. Il existe des systèmes logiques à 3 valeurs (par exemple avec une 3e valeur Inconnu), ou même à une infinité de valeurs en « logique floue »).

§1.3 Connecteurs logiques et tables de vérité

À partir des propositions « simples », on peut construire des propositions composées, en utilisant les connecteurs de base : « et », « ou », « implique », « équivaut » et « contraire ». Ces 5 connecteurs sont définis par leurs actions sur les valeurs de vérité (voir la table 1.1). Plus précisément si p et q sont deux propositions :

La conjonction de p et q , notée symboliquement $p \wedge q$, lire p et q est vraie si et seulement si p et q sont vraies ;

La disjonction de p et q , notée symboliquement $p \vee q$, lire p ou q est fausse si et seulement si p et q sont fausses ;

L'implication de p vers q , notée symboliquement $p \Rightarrow q$, lire p implique q , ou « si « p alors » q est fausse si et seulement si p est vraie et q est fausse ;

Équivalence de p et q , notée symboliquement $p \Leftrightarrow q$, lire p équivaut q , ou p « si et seulement si » q est fausse si et seulement si p et q n'ont pas la même valeur de vérité ;

Négation de p , notée symboliquement $\neg p$, lire non p ou en mettre le verbe contenu dans p à la *forme négative*. Alors $\neg p$ a la valeur de vérité opposée à celle de p .

p	$\neg p$
V	F
F	V

Négation

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjonction

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Implication

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Équivalence

TABLE 1.1 – Tables de vérité des 5 connecteurs de base.

REMARQUE 2. La disjonction (« ou ») est prise dans le sens inclusif, c'est à dire qu'elle vraie si l'une au moins des deux propositions est vraie. Par exemple : si « mon prétendant doit être beau ou riche » est vraie, le prétendant peut être les deux à la fois.

REMARQUE 3. À partir d'une proposition quelconque p , on peut construire des propositions toujours vraies (on dit des tautologies) ou toujours fausses (des contradictions), quelle que soit la valeur de vérité de p . Par exemple

- p ou non p (symboliquement $p \vee \neg p$) est toujours vraie, de même que $p \implies p$, $p \iff p$, ...
- p et non p (symboliquement $p \wedge \neg p$) est toujours fausse, de même que $p \implies \neg p$, $p \iff \neg p$, ...

§1.4 Propriétés

Les propriétés suivantes se montrent à l'aide des tables de vérité. Elle permettent dans certains cas de simplifier les expressions comprenant plusieurs connecteurs.

Commutativité et associativité

Commutativité $p \vee q$ et $q \vee p$ ont les mêmes valeurs de vérité. De même que $p \wedge q$ et $q \wedge p$.

Associativité Si p, q et r sont 3 propositions : $(p \vee q) \vee r$ et $p \vee (q \vee r)$ ont la même valeur de vérité. De même que $(p \wedge q) \wedge r$ et $p \wedge (q \wedge r)$.

Distributivités Dans le calcul numérique on sait que la multiplication est distributive sur l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Dans le calcul propositionnel, on a cette même propriété : la distributivité de la disjonction sur la conjonction, de même que la distributivité de la conjonction sur la disjonction.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

TABLE 1.2 – Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$ et inversement.

Lois de « De Morgan »

Une propriété utile dans les propositions composées contenant des négations est la propriété de De Morgan (Augustus de Morgan était un mathématicien et logicien anglais, †1871)

Propriété 1. Pour toutes propositions p et q , on

- Négation d'une conjonction : $\neg(p \wedge q)$ a la même valeur de vérité que $\neg p \vee \neg q$;
- Négation d'une disjonction : $\neg(p \vee q)$ a la même valeur de vérité que $\neg p \wedge \neg q$;

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

On peut résumer ces deux propriétés en disant que « la négation d'une conjonction et une disjonction et inversement ».

Exemple 2. La négation de « mon fiancé sera beau ou riche » est

Contraposition La contraposée d'une implication $p \implies q$ est l'implication $\neg q \implies \neg p$.

Exemple 3. La contraposée de « s'il pleut alors la pelouse est mouillée » est

Propriété 2. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

p	q	$p \implies q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \implies \neg p$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

§1.5 Quantificateurs

Dans cette partie, on considère des propositions contenant des variables. Par exemple la proposition $x^2 > 0$ est une proposition contenant une variable numérique x . Elle peut-être vraie ou non en fonction de la valeur de x . De même que la proposition « tout homme est mortel ».

Dans certaines situations la proposition veut exprimer une propriété « universelle », c'est à dire vraie pour toute valeur possible pour la variable (éventuellement dans un ensemble donné). Dans d'autres situations la proposition veut exprimer qu'une propriété peut admettre des exceptions.

Quantificateur universel Lorsqu'on veut exprimer une proposition affirmant une propriété pour toutes les valeurs possibles de la variable, on utilise le quantificateur universel : « pour tout » ou « quel que soit », noté symboliquement $\forall$.

Exemple 4. La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est vraie, alors que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ est fausse. De même

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \implies x^2 > 0$$

est vraie. On peut aussi l'exprimer sous la forme $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$.

Quantificateur existentiel Lorsqu'on veut dire qu'une propriété est parfois vraie (n'est pas toujours fausse), on utilise le quantificateur existentiel : $\exists$, lire « il existe ».

Exemple 5. La proposition $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ est vraie, alors que $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ est fausse.

Négation d'une proposition universelle si $P(x)$ est une proposition dépendant d'une variable x , la négation de $\forall x, P(x)$ est la proposition $\exists x, \neg P(x)$.

Négation d'une proposition existentielle si $P(x)$ est une proposition dépendant d'une variable x , la négation de $\exists x, P(x)$ est la proposition $\forall x, \neg P(x)$.

Exemple 6. — La négation de « toutes les Miss France sont belles et intelligentes » est
 — La négation de « il existe des politiciens honnêtes » est

§2 Modes de raisonnement

Dans les démonstrations de théorème et dans les exercices, on utilise différents schémas de raisonnement. En fonction de la situation un schéma de raisonnement peut s'avérer plus efficace et plus adapté.

§2.1 Raisonnement par déduction directe ("modus ponens")

C'est le schéma utilisé le plus couramment. On a une hypothèse p supposée vraie. Par ailleurs on sait que $p \implies q$, on déduit alors que q est vraie.

Exemple 7. Pour $x > 0$, on suppose que $p : \sqrt{x} \geq 10$, par ailleurs on sait que la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$: pour tous réels x, y , on a $x \geq y \geq 0 \implies x^2 \geq y^2$, on en déduit que $(\sqrt{x})^2 \geq 10^2$, autrement dit $x \geq 100$.

Exemple 8. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel tel que $x > 1$. Montrer que $e^{x-1} > 1$.

§2.2 Raisonnement par disjonction de cas

On utilise souvent ce raisonnement en arithmétique, par exemple en considérant qu'un nombre entier est pair ou impair. Dans chacun des cas, on propose un raisonnement qui prouve le résultat.

Exemple 9. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.

Exemple 10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$.

§2.3 Raisonnement par contraposition

Nous avons vu plus haut (propriété 2) qu'une implication $p \implies q$ et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Par conséquent, pour montrer $p \implies q$, on peut prouver sa contraposée $\neg q \implies \neg p$, qui dans certaine situation peut s'évéler plus simple à prouver.

Exemple 11. Montrons que pour tout entier n , n^2 est pair $\implies n$ est pair.

§2.4 Raisonnement par l'absurde (apagogie)

Ce type de raisonnement s'avère très efficace, voir inévitable dans certaines situations.

Principe du raisonnement par l'absurde Pour montrer qu'une proposition p est vraie, on suppose quelle est fausse (on parle alors de l'hypothèse absurde) et on montre que cette hypothèse conduit à une *contradiction* (une proposition vraie et fausse à la fois).

Exemple 12. Montrons que 0 n'a pas d'inverse. Par l'absurde, supposons que 0 admette un inverse a . Alors $0 \times a = 1$. Donc comme $0 + 0 = 0$, $a(0 + 0) = a \times 0 + a \times 0$, c'est à dire $1 = 1 + 1$ donc $1 = 2$. Contradiction. On en déduit que l'hypothèse « 0 peut avoir un inverse » ne peut être retenue. Donc 0 n'a pas d'inverse.

§2.5 Raisonnement par analyse-synthèse (par condition nécessaire)

Il arrive que dans certains contextes (en particulier dans la résolution des équations), on soit amené à prouver l'existence et l'unicité d'un objet mathématique (un nombre, un point, un vecteur, ...) vérifiant certaine(s) propriété(s). Le raisonnement par analyse-synthèse se fait alors en deux étapes :

Analyse on suppose que cet objet existe. On essaye alors prouver que si cet objet existe, il ne peut être qu'un certain objet O .

Synthèse on examine l'objet O , identifié par analyse et on vérifie qu'il vérifie les propriétés requises.

En résumé, on part du résultat pour remonter à la solution.

Exemple 13. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 1/2$, par $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$. Montrer que pour tout réel $y \neq 1/2$, il existe un réel x unique tel que $f(x) = y$.

Exemple 14. Résoudre sur $[-2; +\infty[$, l'équation $\sqrt{x+2} = x$.

§3 Raisonnement par récurrence

Ce mode de raisonnement est utile dans les situations où on considère une proposition dépendant d'un entier naturel n .

§3.1 Introduction

On considère une proposition mathématique P_n , dépendant d'un nombre entier naturel n . Comment prouver P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

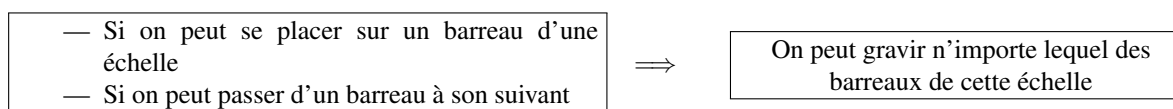
- Exemple 15.** 1. Pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 2n - 1$. Justification :
 2. La différence entre 2 carrés successifs est un nombre impair. Justification :
 3. Pour tout nombre entier naturel n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Voir l'exemple 17, ou le cours de Première sur les suites arithmétiques.

§3.2 Principe du raisonnement par récurrence

Notons P_n la propriété que l'on veut prouver, dans laquelle intervient un entier n . On ne peut évidemment pas tester cette propriété pour une infinité de valeurs de n . Une alternative est le raisonnement par récurrence¹ :

- On vérifie la propriété pour la première valeur de n (souvent $n = 0$); phase
- On s'assure (on démontre) que *si* la propriété est vraie pour un certain nombre entier n , *alors* elle est *assurément* vraie pour l'entier suivant $n + 1$; phase Autrement dit on prouve que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie.
- à l'aide des deux propriétés précédentes, on peut montrer de proche en proche que la propriété est vraie pour n'importe quel nombre entier; phase

Cette idée peut être exprimée de façon imagée :



1. On dit aussi par *induction* mathématique. Ce principe a été formalisé par Giuseppe Peano, mathématicien italien († 1932)

On peut illustrer également cette idée avec une suite infinie de dominos que l'on souhaite faire tomber (voir la figure 1.1, gauche). Pour faire tomber tous les dominos, il suffit de s'assurer de deux conditions :

1. On peut faire tomber le premier domino de la chaîne
2. Chaque domino en tombant fait tomber son successeur



FIGURE 1.1 – Dans la figure de droite, le fait que le 1^{er} domino tombe n'assure pas que tous les suivants tombent également.

§3.3 Étapes d'une démonstration par récurrence

Une démonstration (ou preuve) par récurrence comporte les étapes suivantes (à faire apparaître clairement dans les rédactions) :

- Initialisation** on vérifie que la propriété P_n est vraie pour un certain rang initial (typiquement $n = 0$)
- Hérédité** On prouve que pour tout n à partir du rang initial, $P_n \implies P_{n+1}$.
 Pour ceci, on suppose que pour un certain entier n , P_n est vraie (Hypothèse de Récurrence, abb. HR).
 On démontre que la propriété est aussi vraie au rang suivant. Autrement dit, P_{n+1} est aussi vraie.
- Conclusion** la propriété P_n étant héréditaire et vraie pour le rang initial, elle est vraie pour tout entier n , supérieur ou égal au rang initial.

§3.4 Exemples

Exemple 16. Soit à démontrer la propriété $P_n : 2^n \geq n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation pour $n = 0$, l'inégalité est vraie car $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$, donc $P_0 : 2^0 \geq 0 + 1$ est vraie

Hérédité On suppose que P_n est vraie pour un certain n (Hypothèse de Récurrence).
 Il faut montrer qu'alors $P_{n+1} : 2^{n+1} \geq n + 2$ est aussi vraie :

$$\begin{array}{rcl} 2^n & \geq & n + 1 \\ 2 \times 2^n & \geq & \dots\dots\dots \\ 2^{n+1} & \geq & \dots\dots\dots \end{array}$$

Le nombre n étant positif, on a $2n \geq n$, donc on peut affirmer que $2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$. Donc P_{n+1} est aussi vraie.

Conclusion la propriété étant héréditaire pour $n \geq 0$ et vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 17. Montrons par récurrence² que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation pour $n = 1$,

Hérédité On suppose que $P_n : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour un certain n (Hypothèse de Récurrence). En se basant sur cette hypothèse, montrons que $P_{n+1} : 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \dots\dots\dots$ est nécessairement vraie.

.....

Conclusion la propriété étant héréditaire pour $n \geq 1$ et vraie pour $n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

Exemple 18. (En classe) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. On peut bien sûr utiliser le résultat sur la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, ici de 1^{er} terme 1 et de raison 1 : rappel $\frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$