

Chapitre 2

SUITES

Sauf mention explicite du contraire, tout au long de ce chapitre, la lettre n désigne un nombre entier naturel ($n \in \mathbb{N}$).

§1 Rappels

Les suites sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ ou un intervalle $[n_0; +\infty[$ contenu dans $\mathbb{N}$. Pour une suite, on s'intéresse à l'étude de sa *monotonie* et du *sens de variation* (croissante, décroissante?), ainsi que de son comportement lorsque n devient très grand (voir §2).

§1.1 Terminologie et exemples

Pour une suite u , on note u_p le terme de rang p (au lieu de la notation $u(p)$ qu'on utilise dans le cas des fonctions). Le vocabulaire image/antécédent n'est pas non plus utilisé pour les suites. La suite dans son ensemble est notée u ou (u_n) (avec des parenthèses).

Exemple 1. La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est définie pour La suite (v_n) définie par $v_n = 2^n$ est définie pour

Modes de définition d'une suite On peut distinguer deux types de suite, selon la façon dont les termes sont définies :

- les suites « explicites » : le terme général u_n est défini par une expression en fonction de n (exemples : $u_n = n^2 + 1$ ou $u_n = e^{1/n}$, ...);
- les suites « récurrentes » : chaque terme étant défini en fonction du (ou des) term(s) précédent(s). En général on donne une première valeur et ensuite on définit le calcul de chaque terme à partir du terme précédent.

Exemple 2. 1. La suite (u_n) telle que $u_0 = 5$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 3$:

2. La suite (v_n) telle que $v_0 = 16$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$

3. La suite (w_n) telle que $w_0 = -4$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$

§1.2 Sens de variation

Définition 1. Une suite est soit croissante, soit décroissante, sinon non monotone :

- Une suite u est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- De même u est décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).

REMARQUE 1. Si une suite est à terme strictement positif, $u_n < u_{n+1} \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Cette dernière inégalité est parfois plus simple à tester que le signe de $u_{n+1} - u_n$.

§1.3 Usage des calculatrices

On peut dresser des tableaux de valeurs, représenter graphiquement les termes d'une suite par une suite de points ou par un graphique en "toile d'araignée" (Voir aussi sur les rabats de couverture du "manuel" de mathématiques).

TI

- mode $\rightarrow$ Suite pour mettre la calculatrice en mode "suite"
- $f(x)$ pour rentrer l'expression de la suite $u(n)$, en fonction de n ou de $u(n-1)$, en utilisant 2^{nde} + $\boxed{7}$ pour noter u
- utiliser $\boxed{\text{graphe}}$, $\boxed{\text{table}}$, ... comme pour les fonctions
- Utiliser $\boxed{\text{format}}$ et $\boxed{\text{trace}}$ pour avoir un graphique en toile d'araignée

Casio

- À partir du $\boxed{\text{menu}}$, choisir RECUR
- Choisir le "type" (explicite ou récurrente) de la suite avec F3
- Utiliser la variable n avec la touche F4.
- Les bornes du tableaux de valeurs avec F5 : RANG
- Affichage avec F6, instruction TABL

Numworks

- Choisir Suites dans le menu principal
- Choisir une suite (par défaut u), ou « Ajouter une suite », puis OK
- Sélectionner la suite puis OK, préciser ensuite Type de suite : Explicite, Récurrente, ...
- Utiliser la variable n avec la touche $\boxed{x, n, t}$ et pour les suites récurrentes utiliser $u(n)$
- Indiquer la (ou les) valeurs initiales
- Choisir Afficher les valeurs ou Tracer le graphique

Exemple 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 5}$. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2, u_3 . Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer votre conjecture par récurrence.

§1.4 Algorithmique et programmation

Pour calculer le n^{e} terme d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut définir une fonction qui retourne le n^{e} terme de la suite, en fonction de n et de la donnée de n_0 , indice du premier terme, ainsi que u_{n_0} , la valeur initiale de la suite. La fonction f doit être définie indépendamment.

Algorithme

```
Fonction terme( $n$  un entier,  $n_0$  un entier,  $u_{n_0}$  un nombre)
     $u \leftarrow u_{n_0}$ 
    Pour  $i$  allant de  $n_0 + 1$  à  $n$  faire
         $u \leftarrow f(u)$ 
    Renvoyer  $u$ 
```

Programme en Python

```
def terme(n, ninit, uinit):
    u = uinit
    for i in range(ninit+1, n+1):
        u = f(u)
    return u
```

REMARQUE 2. Il est bien sûr possible de mémoriser les termes calculés dans un tableau. Dans ce cas on initialise le tableau (ou liste) par $u = [u_{\text{init}}]$ et dans la boucle `for`, remplacer la commande de mise à jour de u par `u.append(f(u[i-1]))` (voir le listing 2.1).

§2 Convergence d'une suite

§2.1 Limite infinie

Notion intuitive Une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$, si les termes de la suite deviennent *aussi grand l'on veut*, pourvu que le rang n soit assez grand.

Définition 2. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (ou indice). On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

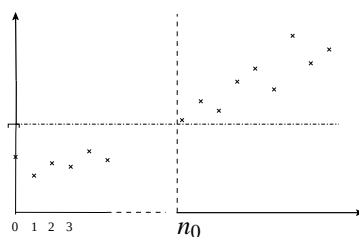


FIGURE 2.1 – Pour $n \geq n_0$, le terme u_n est dans l'intervalle ouvert $]A; +\infty[$.

REMARQUE 3. La propriété $u_n \in]A; +\infty[$ équivaut à $u_n > A$. Donc dans la caractérisation d'une limite $+\infty$, on peut aussi écrire : pour tout $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont tous supérieurs à A .

Propriété 1. Les suites de référence (n) , (n^2) , (n^3) et $(\sqrt{n})$ ont pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. En classe. □

Définition 3. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (ou indice). On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple 4. Les suites $(-n)$, $(-n^2)$, $\dots$ ont pour limite $-\infty$.

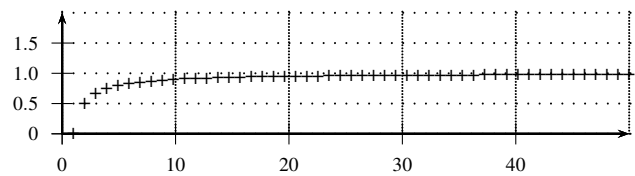
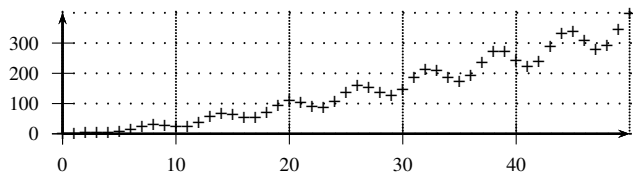
Propriété 2. De manière générale les suites de la forme (kn) , (kn^2) , $\dots$, $(k\sqrt{n})$ ont pour limites $+\infty$ ou $-\infty$, en fonction du signe de k .

REMARQUE 4. Attention : une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas nécessairement monotone. Contre exemple $u_n = n(\sqrt{n} + \sin(n))$, voir la figure 2.2. De la même façon, une suite croissante (resp. décroissante) ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

§2.2 Limite finie

Notion intuitive Une suite (u_n) admet pour limite finie un nombre réel l , si les termes de la suite s'approchent *autant que l'on veut* de l pourvu que n soit assez grand (on dit lorsque n tend vers l'infini).

On dit aussi que la suite (u_n) converge vers l (lorsque n tend vers $+\infty$) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

FIGURE 2.2 – À gauche une suite non monotone qui tend vers $+\infty$, à droite une suite croissante qui ne tend pas vers $+\infty$.

Définition 4. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel l (ou converge vers l), si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (ou indice). On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Exemple 5.

1. la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$ a pour limite 0.

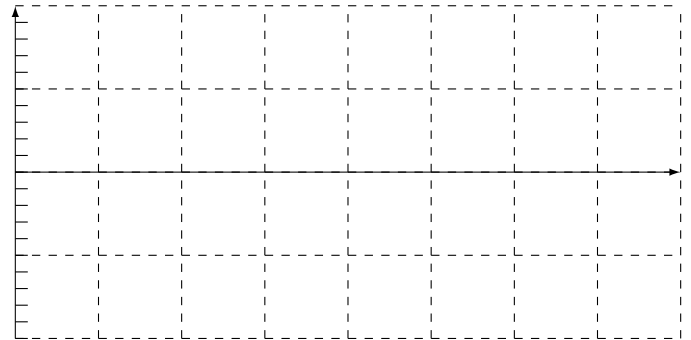
$$u_1 = \dots\dots\dots$$

2. La suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ a pour limite 0.

$$u_1 = \dots\dots\dots$$

3. La suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n+1}{n}$ a pour limite 1.

$$u_1 = \dots\dots\dots$$



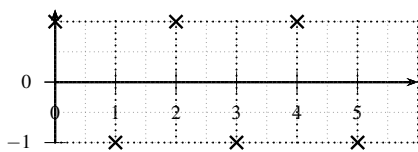
Propriété 3. Pour tout réel k , les suites de référence $\left(\frac{k}{n}\right)$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)$, $\left(\frac{k}{n^3}\right)$ et $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$ convergent vers 0.

Démonstration. En classe. □

Propriété 4. Une suite constante (u_n) telle que $u_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, a pour limite c . Il en est de même si la suite est constante à partir d'un certain rang.

§2.3 Convergence et divergence d'une suite

Toutes les suites n'ont pas de limite finie ou infinie. Par exemple la suite alternée $(-1)^n$ n'a pas de limite. En effet les termes de la suite sont alternativement -1 et $+1$, donc la distance entre deux termes consécutifs est Donc, à partir de n'importe quel rang, il sera toujours impossible que tous les termes de la suite soit dans un intervalle ouvert d'amplitude



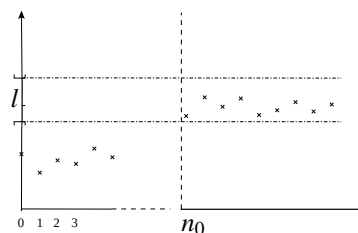
Vocabulaire

On dit qu'une suite

- converge lorsqu'elle a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$
- diverge lorsqu'elle n'a pas de limite ou a une limite infinie.

§3 Opérations sur les limites

Les propriétés suivantes seront admises. On considère deux suites u et v . On veut étudier la convergence de $u + v$, de uv et de $\frac{u}{v}$ à partir des informations sur la convergence de u ou de v .

FIGURE 2.3 – Pour tout $n \geq n_0$, le terme u_n est dans l'intervalle ouvert contenant l .

Limite d'une somme	(u_n) a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
	(v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$(u_n + v_n)$ a pour limite				...

Limite d'un produit	(u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
	(v_n) a pour limite	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$(u_n v_n)$ a pour limite			...	...

REMARQUE 5. On détermine le signe de la limite à partir de la règle des signes.

Limite d'un quotient	(u_n) a pour limite	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$l \neq 0$	0
	(v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	0^+ ou 0^-	0
	$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite		...	...			

Définition 5. Une forme indéterminée (FI) est un cas d'opérations sur des limites, où la connaissance des limites de (u_n) et (v_n) ne suffit pas à déterminer la limite du résultat. Pour les mémoriser, on les note

$$\infty - \infty \quad \infty \times 0 \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Exemple 6. Si (u_n) est la suite de terme générale $u_n = n$ et (v_n) telle que $v_n = n^2$, alors puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ sont tous les deux indéterminés de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination, une étude particulière est nécessaire. En effet $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{n^2}$ converge vers 0, alors que $\frac{v_n}{u_n} = \frac{n^2}{n}$ diverge vers $+\infty$.

REMARQUE 6. La forme " $l/0$ " avec $l \neq 0$, est indéterminée dans le sens où si le dénominateur a pour limite 0, avec un signe non constant, le quotient n'a pas de limite. Considérer par exemple la suite u_n/v_n , avec les suites u et v définies par $u_n = 1$ et $v_n = (-1)^n/n$.

§3.1 Techniques de levée d'indétermination

Il n'existe pas de technique universelle pour lever une indétermination. Dans les formes indéterminées faisant apparaître des limites infinies, il s'agit de comparer la "vitesse de croissance" des infinies. Une technique qui s'avère souvent efficace et de repérer les termes ou facteurs "prépondérants" ou « dominants », ensuite par une factorisation, suivie si nécessaire d'une simplification, se ramener à une forme qui n'est plus indéterminée.

Cette technique est en particulier efficace dans les formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\infty - \infty$.

Exemple 7. Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n$ pour $n \geq 0$. Le terme prépondérant est n^2 , donc on le met en facteur $u_n = n^2(1 - \frac{n}{n^2}) = \dots\dots\dots$

Exemple 8. Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+1}{n^2+2n+6}$. On factorise le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant (de plus haut degré) et on simplifie $u_n = \frac{n(1+1/n)}{n^2(1+2n/n^2+6/n^2)} \dots\dots\dots$

§4 Limites et comparaison

§4.1 Théorème de comparaison (fam. "théorème du piston")

Théorème 1. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ (on dit que (u_n) minore (v_n)). Alors on a nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration. En classe. □

Exemple 9. La suite $v_n = n + \frac{1}{n^2}$ est minorée par la suite $u_n = n$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $u_n \leq v_n$, on en déduit que $\dots\dots\dots$

REMARQUE 7. De la même façon, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et à partir d'un certain rang $\dots\dots\dots$

REMARQUE 8. Dans le théorème précédent, il suffit que la comparaison $u_n \leq v_n$ (ou dans l'autre sens) soit valable à partir d'un certain rang, pas nécessairement à partir de $n = 0$.

§4.2 Théorème d'encadrement (fam. "théorème des gendarmes")

Théorème 2 (Admis). Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que

- À partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- Les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ

alors la suite (v_n) converge également vers ℓ .

Démonstration. En classe. □

Exemple 10. La suite u définie par pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ converge vers 0. En effet

§4.3 Monotonie et convergence

Rappel. Une suite (u_n) est croissante (éventuellement à partir d'un certain rang n_0), si $u_{n+1} \geq u_n$ (pour $n \geq n_0$).

Théorème 3. Si une suite est croissante et converge vers une limite finie l , alors tous ses termes sont inférieurs ou égaux à l .

Démonstration. En classe. □

REMARQUE 9. De la même façon (en considérant la suite opposée $(-u_n)$), on montre que si une suite est décroissante et converge vers une limite finie l , alors tous ses termes sont supérieurs ou égaux à l .

REMARQUE 10. Si une suite est à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. En effet

Définition 6. Une suite u est majorée s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier n , $u_n \leq M$. On dit alors que M est un majorant de la suite.

De même u est minorée s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier n , $u_n \geq M$. Le nombre M est alors un minorant de u .

Une suite est bornée si elle est minorée et majorée.

Exemple 11. La suite u telle que $u_n = 1 + \frac{2}{n}$ est

REMARQUE 11. Si M est un majorant de la suite, alors $M+1$, $M+2$, $M+10^{-5}$, ... sont aussi des majorants.

Exemple 12. Il existe des suites qui sont ni majorées, ni minorées. Par exemple

Théorème 4. (Convergence des suites monotones. Admis)

1. Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
2. Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Théorème 5. (Passage à la limite dans une inégalité)

1. Si u est une suite majorée par M et converge vers le nombre l , alors $l \leq M$.
2. De même si u est suite minorée par m et converge vers le nombre l , alors $l \geq m$.

Démonstration. En classe. □

Théorème 6 (Admis).

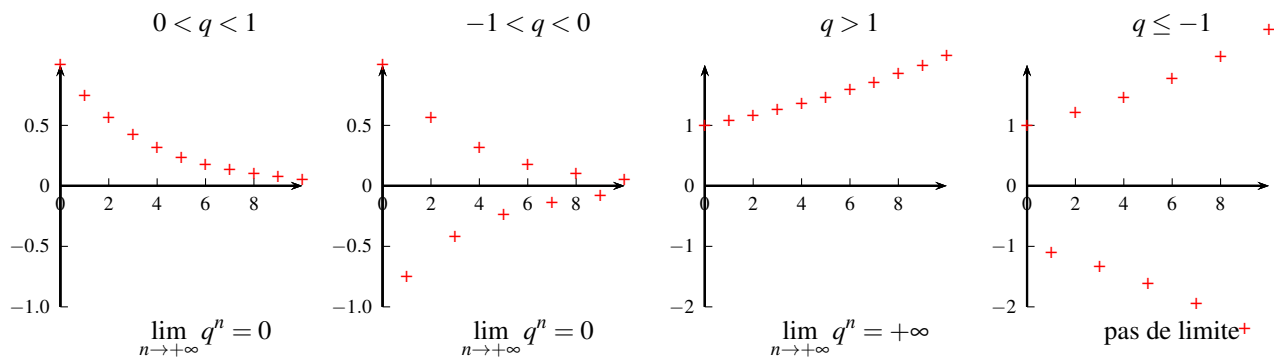
1. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$;
2. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

§5 Convergence d'une suite géométrique

Rappel. Une suite géométrique est suite récurrente définie par un premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = q u_n$. Le nombre q est de la suite. Le terme général s'écrit $u_n = u_0 q^n$.

Exemple 13. — La suite $u_n = (-1)^n$ est une suite géométrique de 1^{er} terme et de raison
 — La suite $v_n = 0.5 \times 5^n$ est une suite géométrique de 1^{er} terme et de raison
 — La suite $w_n = -0,5^n$ est une suite géométrique de 1^{er} terme et de raison

Théorème 7. Selon la valeur de q , la suite géométrique $u_n = q^n$ se comporte de la façon suivante (voir la figure 2.4)

FIGURE 2.4 – Convergence de la suite $(q)^n$ selon la valeur de $q \in \mathbb{R}$

Valeur de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
Convergence de $(q)^n$	pas de limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	constante $1^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration. On démontre le résultat uniquement dans le cas $q > 1$. On peut justifier les autres cas, en se basant sur $q > 1$ (en prenant $q' = 1/q$ par exemple).

On montre dans un premier temps le lemme¹ suivant qui est une inégalité due à Jacob Bernoulli († 1705).

Lemme 1 (Inégalité de Bernoulli). Si $a \geq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration. En classe. □

Pour démontrer la limite infinie de q^n lorsque $q > 1$, on pose $a = q - 1$. Comme $q > 1$, alors $q - 1 > 0$. On pose $a = q - 1$. On a d'après ce qui précède $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$. Or comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$. D'après le théorème de comparaison §4.1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$. □

§6 Algorithmique et programmation

Un problème classique de programmation des suites est le calcul du n^{e} terme d'une suite récurrente (vu en §1.4).

Exemple 14. Considérons par exemple la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Pour calculer le p^{e} terme de la suite, on peut utiliser l'algorithme suivant :

```

u ← 1
Pour i allant de 1 à n faire
    u ← √(u + 1)

```

```

1 from math import sqrt
2
3 def terme(n):
4     u = 1 # valeur initiale
5     for i in range(n): # on peut aussi utiliser range(1,n+1)
6         u = .....
7     return u

```

Dans certaines situations, il peut être pratique de définir préalablement la fonction f qui intervient dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Le programme suivant calcule les premiers termes de la suite et les mémorise dans une liste :

```

1 def f(x): # fonction intervenant dans la relation de recurrence
2     return x**3+x
3
4 def premier_terme(n,n_init,u_init): # n : le dernier terme calcule, n_init et u_init le rang et la valeur du
5     # premier terme
6     u = [u_init] # u est un tableau dans lequel on memorise les termes
7     for i in range(ninit+1,n+1):
8         u.append(f(u[i-1])) # on rajoute a la liste le terme calcule
9     return u

```

Listing 2.1 – Calcul et mémorisation des premiers termes d'une suite récurrente.

Exemple 15. On considère la suite u définie par $u_n = n^3 + n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on cherche par exemple le plus petit indice n tel que $u_n \geq 10^3$. On peut utiliser un programme qui calcule les termes successifs de la suite et le compare au seuil 10^3 pour s'arrêter dès qu'un terme le dépasse.

```

n ← 0
Tant que n³ + n < 10³ faire
    n ← n + 1

```

```

1 def seuil(s): # s est le seuil à dépasser
2     n = 1
3     while n**3+n < 1000:
4         n = n+1
5     return n

```

1. Un lemme est une propriété préalable à la démonstration d'une proposition (subséquente)