

Chapitre 6

CONTINUITÉ, DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

§1 Continuité

§1.1 Continuité ponctuelle

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. La fonction f est *continue* en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Rappel. La limite finie d'une fonction mathématique est définie de la même façon qu'au chapitre 4, sections §1 et §2 :

Une fonction f a pour limite un nombre ℓ lorsque x tend vers x_0 , lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les images $f(x)$ pourvu que x soit dans un certain intervalle suffisamment petit contenant x_0 .

Donc on peut traduire la définition de la continuité de f en x_0 ainsi : tout intervalle ouvert contenant $f(x_0)$ contient

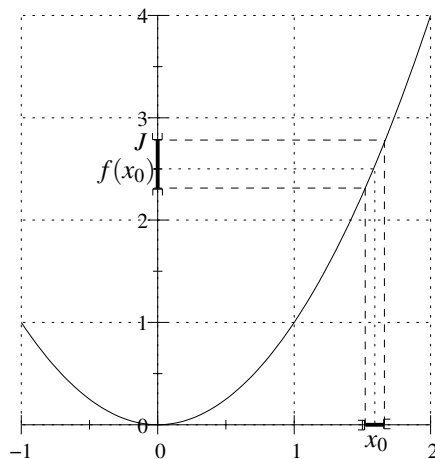


FIGURE 6.1 – Fonction continue en x_0 .

REMARQUE 1. Une fonction continue en x_0 doit être définie en x_0 . Par exemple la fonction “inverse” $x \mapsto \frac{1}{x}$

REMARQUE 2. Il faut aussi remarquer que pour avoir la continuité de f en x_0 , la limite à gauche et la limite à droite de f doivent être égales à $f(x_0)$ (i.e. il ne doit pas y avoir de « saut » en x_0).

Exemple 1. Les fonctions de références vues en classes de Première et de Seconde :

- “puissance” : $x \mapsto x^n$ pour $n \geq 0$, définie sur
- “racine” : $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur
- “valeur absolue” : $x \mapsto |x|$, définie sur
- « exponentielle » : $x \mapsto e^x$, définie sur

de même que sinus, cosinus, etc., sont toutes continues en tout point de leur ensemble de définition. Mais toutes les fonctions ne sont pas continues partout !

Discontinuité en un point

Définition 2. Une fonction f est *discontinue* en un point x_0 s’il n’est pas continue en x_0 .

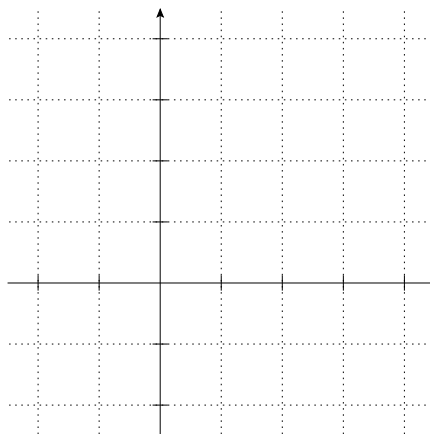
Exemple 2. La fonction “Partie entière”, notée E , définie sur $\mathbb{R}$ comme le *plus grand entier* qui est inférieur ou égal à x (voir figure 6.2).

Par exemple $E(\sqrt{2}) = \dots, E(\sqrt{10}) = \dots, E(\pi) = \dots, E(1,9999) = \dots, E(2) = \dots, E(-1) = \dots, E(-0,5) = \dots, E(0) = \dots, E(-1) = \dots$, etc

La fonction partie entière est discontinue en tout x_0 entiers (relatifs). En effet, si $x_0 \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} E(x) = \dots \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} E(x) = \dots$$

En effet, les limites à droite et à gauche ne coïncident pas, donc la condition de la définition 1 n’est pas vérifiée.

FIGURE 6.2 – Fonction partie entière E

Continuité et opérations sur les fonctions

En appliquant les théorèmes généraux sur les limites (addition, multiplication, composition), on peut énoncer les propriétés suivantes :

Propriété 1 (Admise). Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Si f et g sont continues en un point x_0 , alors

- La somme $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- Le produit $fg : x \mapsto f(x)g(x)$
- Le quotient $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, si $g(x_0) \neq 0$

sont continues en x_0 .

De même si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est aussi

La dernière propriété découle de la propriété de composition des limites (chapitre 4, section §3.2, théorème 1. Autrement dit, si f est continue et g continue en $f(x_0)$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \dots\dots\dots$

Exemple 3. La fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ est continue

Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 1 (Point fixe). Soit (u_n) une suite récurrente définie par un terme initial (e.g. u_0) et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et f est continue en ℓ alors

$$f(\ell) = \ell$$

Démonstration. D'après le théorème 2 du chapitre 4, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$, car f est continue en ℓ . D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \dots\dots\dots$ □

Cette propriété permet de déterminer la limite d'une suite récurrente, lorsqu'on a déjà démontré qu'elle est convergente, en résolvant l'équation $f(x) = x$. Une conséquence importante est si f n'a pas de point fixe (i.e. si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution), la suite (u_n) est divergente.

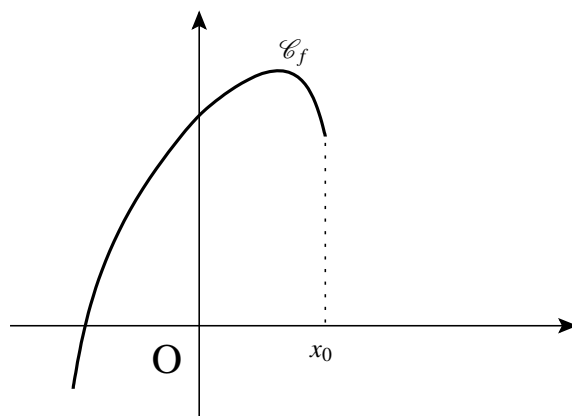
§1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 3. Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur I et si f est continue en tout point de I .

Exemple 4. Les fonctions de référence vues en classes de Première et de Seconde sont toutes continues sur leurs intervalles de définition.

Interprétation graphique

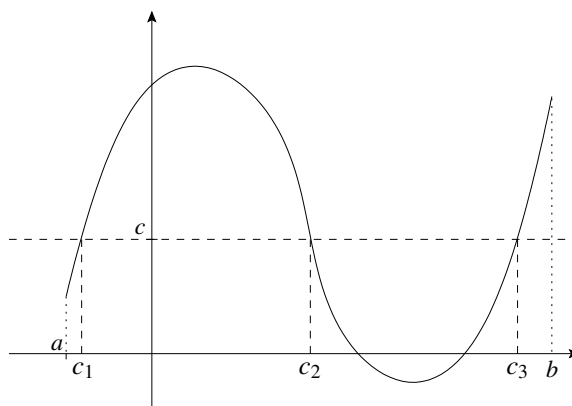
Une fonction f est continue sur un intervalle I si sa courbe représentative

FIGURE 6.3 – Exemple de courbe d’une fonction discontinue en un point x_0 .**Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)**

Théorème 2 (Admis). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors pour tout nombre k , compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

REMARQUE 3. Ce théorème peut être traduit comme suit en utilisant le vocabulaire des équations : Si f est continue sur $[a; b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l’équation $f(x) = k$

REMARQUE 4. Dans le théorème 2, des valeurs intermédiaires (abréviation : TVI), la fonction f n’est pas supposée monotone sur $[a; b]$. L’équation $f(x)$ peut donc avoir plusieurs solutions distinctes dans l’intervalle $[a; b]$.

FIGURE 6.4 – Théorème des valeurs intermédiaires : l’équation $f(x) = c$ admet au moins une solution dans l’intervalle $[a; b]$.

Corollaire 1 (Changement de signe et passage à zéro). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors, il existe (au moins un) $c \in]a; b[$ tel que

REMARQUE 5. Pour résoudre une équation du type $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$, on se ramène souvent à une équation du type $h(x) = 0$ en posant $h(x) = f(x) - k$ ou $h(x) = f(x) - g(x)$. Si h est continue, alors ses changements de signes se traduisent par l’existence de solutions.

Cas des fonctions strictement monotones : “existence et unicité”

Théorème 3 (Théorème de la bijection continue). Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Soit k un nombre entre $f(a)$ et $f(b)$ ($k \in [f(a); f(b)]$ ou $k \in [f(b); f(a)]$ selon le cas), il existe alors un réel $c \in [a; b]$ unique tel que $f(c) = k$.

Démonstration. D’après le théorème 2, il existe c tel que

□

REMARQUE 6. En reprenant le vocabulaire des équations, si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors

REMARQUE 7. Par convention, dans les tableaux de variation, les flèches $\nearrow$ et $\searrow$ représentent la croissance et la décroissance au sens strict.

Les théorèmes des valeurs intermédiaires 2 et 3 se généralisent à un intervalle quelconque (bornée ou non bornée).

Théorème 4 (Admis). Si f est une fonction continue sur un intervalle I de bornes a et b (éventuellement infinies) et k un nombre compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ (éventuellement $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et/ou $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$), alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

Exemple 5. La fonction inverse $x \mapsto 1/x$ est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = \dots$. Or, si k est compris strictement entre $\dots$ et $\dots$, alors il existe $\dots$.

§2 Dérivation

§2.1 Rappels

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en $x_0 \in I$ si la fonction

$$h \mapsto \dots \quad (\text{taux d'accroissement entre } x_0 \text{ et } x_0 + h)$$

admet une limite finie lorsque $h \dots$. Dans ce cas, cette limite est le nombre dérivée de f en x_0 et on note

$$f'(x_0) = \dots$$

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si $\dots$

Nombre Dérivé et tangente $\dots$

Signe de la dérivée et sens de variation $\dots$

Dérivée et extrema locaux $\dots$

REMARQUE 8. Attention la réciproque est fautive : l'annulation de la dérivée n'implique pas nécessairement l'existence d'un extremum : par exemple $\dots$

§2.2 Dérivabilité et continuité

Théorème 5 (Admis). Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0 .

REMARQUE 9. La réciproque est fautive. On peut considérer le contre-exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue partout mais elle n'est pas dérivable en 0.

§2.3 Formules de dérivation

Dérivées de fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Domaine de définition de la fonction	Fonction dérivée $f'(x)$	Domaine de définition de la dérivée
k (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$mx + p$	$\mathbb{R}$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$. Alors

- $(u+v)' = \dots$
- $(ku)' = \dots$
- $(uv)' = \dots$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dots$

Dérivée d'une fonction composée

Théorème 6 (Admis). Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J contenant les images de u , alors la fonction composée $g : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$g'(x) = u'(x) f'(u(x))$$

Exemple 6. Soit $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 5}$. La fonction g est la composée de $u : x \mapsto 3x^2 + 5$ et de la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$, donc

$$u'(x) = \dots\dots \quad f'(x) = \dots\dots \quad g'(x) = \dots\dots\dots$$

Cas particuliers Les formules de dérivation suivantes découlent du théorème précédent : u étant une fonction dérivable de x

- $(u^n)' = nu' u^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -nu' \frac{1}{u^{n+1}}$
- $(e^u)' = u' e^u$

§3 Convexité

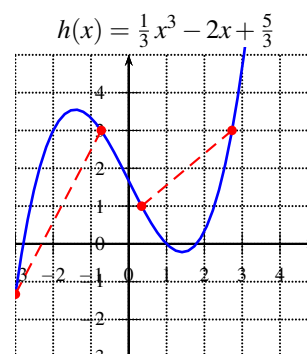
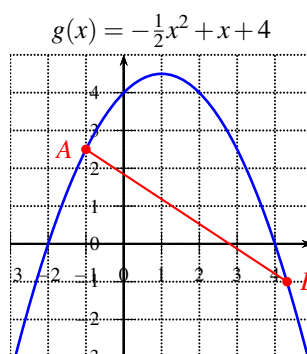
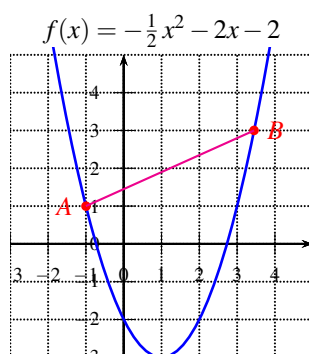
§3.1 Définition générale

Définition 5. Une fonction définie sur un intervalle I est *convexe* sur I si pour tout point A et B de sa courbe représentative, la partie de la courbe située entre A et B est en dessous du segment $[AB]$.

De la même façon, une fonction est *concave* sur I si pour tout point A et B de sa courbe représentative, la partie de la courbe située entre A et B est au-dessus du segment $[AB]$.

Exemple 7. Dans la figure §3.1

- La fonction f est $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g est $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction h est $\dots\dots\dots$ sur $] -\infty; 0]$ et $\dots\dots\dots$ sur $[0; +\infty[$.



REMARQUE 10. On montre qu'une fonction convexe est nécessairement continue et admet même en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Cependant la fonction n'est pas nécessairement dérivable (par exemple : la fonction « valeur absolue »)

§3.2 Convexité des fonctions dérivables

Théorème 7 (Caractérisation admise). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe. Alors, les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

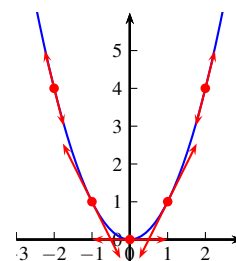
- (i) la fonction f est convexe sur I
- (ii) en tout point de $\mathcal{C}$ la courbe est au-dessus de sa tangente ;
- (iii) la fonction dérivée est croissante sur I .

Ce théorème admet une version symétrique pour les *fonctions concaves*, en remplaçant « au-dessus » par « au-dessous » et « croissante » par « décroissante ». Une fonction dérivable étant croissante si et seulement si sa dérivée est positive, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 8. Une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$

$$f''(x) \geq 0$$

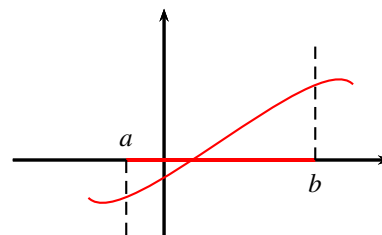
Exemple 8. La fonction cube $x \mapsto x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = (3x^2)' = 6x$. Donc pour $\dots\dots\dots$ $f''(x) > 0$, donc la fonction cube est convexe sur $\dots\dots\dots$. De la même façon, sur $\dots\dots\dots$, la fonction cube est $\dots\dots\dots$



§4 Annexe : méthodes numériques de résolution d'équation

Dans cette section on considère une équation de la forme $f(x) = 0$, à résoudre sur un intervalle I , borné ou non borné. On suppose de plus que

- la fonction f est continue sur I
- la fonction f est monotone sur I
- la fonction f change de signe sur I



On peut alors affirmer, d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $f(x) = 0$ admet exactement une solution c sur l'intervalle I .

L'objectif est de trouver une valeur approchée de c , à une précision donnée, à défaut d'une valeur exacte. Naturellement, pour une équation de la forme $f(x) = g(x)$, on se ramène à la forme précédente, en transposant le second membre à gauche.

§4.1 Utilisation d'une calculatrice graphique

Méthode du balayage

Pour obtenir un encadrement de c d'amplitude 10^{-p} , il suffit de faire afficher la table des valeurs de f , en choisissant judicieusement la valeur initiale de x et en prenant pour *pas* d'incrément 10^{-p} . L'encadrement cherché est alors l'intervalle où la fonction change de signe.

En général, on procède par approximation successives, d'abord par pas de 0,1, ensuite 0,01, ainsi de suite, ...

TI

- On entre la fonction avec la touche $f(x)$
- Avec déftable (2^{de} fenêtre, on choisit la valeur de départ et le pas : DébTable et PasTable
- Faire afficher la table avec table, boutons 2^{de} graphe

Casio

- On entre la fonction avec le menu Graph
- Avec la touche menu, choisir TABLE, ensuite RANGE ou SET
- Choisir la valeur de départ Start, le pas Pitch ou Step et la valeur finale End
- Afficher les valeurs TABL, touche F6

Commande trace Sur les calculatrices, on peut aussi utiliser la fenêtre graphique et la commande trace pour placer un curseur sur la courbe et lire les coordonnées des points de la courbe.

Solveur d'équation Les calculatrices graphiques sont généralement équipées de fonctions de solveur d'équation.

TI

- Utiliser la fonction Résoudre, soit à partir du catalog (2^{de} 0), soit avec la touche résol. La syntaxe est
résoudre(<fonction>, <variable>, <valeur initiale>)
- On peut aussi utiliser la touche calculs avec 2^{de} trace qui permet de résoudre l'équation $f(x) = 0$ ainsi que d'autres équations comme l'intersection de deux courbes, etc. On peut alors avec le curseur indiquer les bornes et une valeur initiale.

Casio

- À partir du menu principal, on choisit EQUA, puis la touche F3, solver
- Saisir l'équation avec la touche = qu'on obtient avec SHIFT et $\square$
- Dans le menu qui s'affiche indiquer la valeur initiale et les bornes, puis F6 SOLV
- On peut aussi, à partir du menu Graph, faire tracer la courbe avec DRAW, utiliser ensuite G-SOLV (touche F5), puis ROOT.

§4.2 Algorithmes classiques de résolution approchée d'une équation $f(x) = 0$

Il existe de nombreuses méthodes de résolution approchée d'équation $f(x) = 0$. On en expose rapidement quelques une ici, sachant que seul la méthode de dichotomie est exigible dans le programme.

Méthode de la dichotomie

Principe On sait par exemple que f change de signe sur $[a; b]$. Donc au départ l'intervalle $[a; b]$ est un premier encadrement du nombre c tel que $f(c) = 0$. Nous allons améliorer cet encadrement, en réduisant cet intervalle de moitié en calculant l'image du milieu $x_m = \frac{a+b}{2}$ de a et b et en considérant les deux possibilités

- soit f change de signe dans la moitié inférieure de l'intervalle, i.e. $f(x_m)f(a) < 0$, auquel cas on rejette la moitié droite de l'intervalle : $b \leftarrow \dots\dots\dots$

- soit f change de signe dans la moitié supérieure de l'intervalle $f(x_m)f(b) \leq 0$
alors on rejette la moitié droite :

Dans chacun des deux cas on remplace l'intervalle $[a; b]$ par un intervalle de longueur moitié, dont l'une des bornes sera x_m le milieu de $[a; b]$.

Exercice 1

Compléter l'algorithme suivant permettant de calculer $\sqrt[3]{2}$ avec une précision de 10^{-6} . On notera que $c = \sqrt[3]{2}$ est solution de l'équation et que la fonction $x \mapsto x^3 - 2$ est d'une part continue et d'autre part $f(1) = \dots\dots\dots$ et $f(2) = \dots\dots\dots$. Donc comme premier encadrement on peut prendre l'intervalle $[1; 2]$.

```
a ← .....
b ← .....
Tant que .....
    m ← .....
    Si ..... alors
        a ← .....
    Sinon
        .....
Fin tant que
```

Étape	1	2	3	4	5
a					
a ³ - 2					
b					
b ³ - 2					
m					
m ³ - 2					

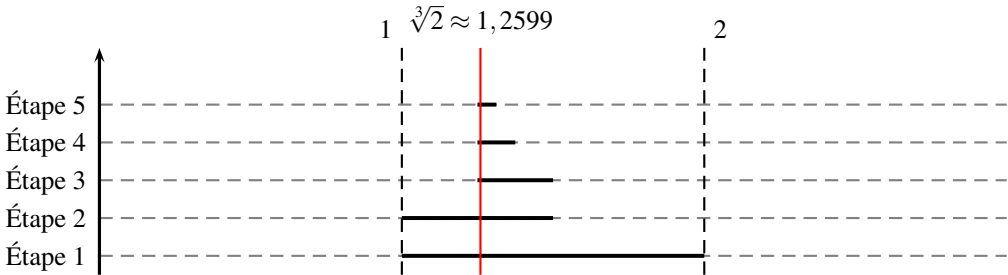
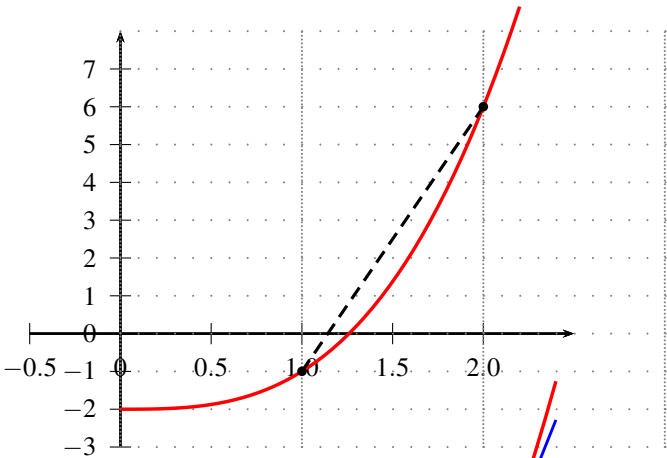


FIGURE 6.5 – Évolution de l'encadrement $\sqrt[3]{2}$ dans la méthode de la dichotomie

Méthode de la fausse position (hors programme)

Principe Étant donné un premier encadrement $[a; b]$, on calcule x_s l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec le segment d'extrémités $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$. Alors on réduit l'intervalle en remplaçant l'une des extrémités par c

- soit $f(a)f(s) > 0$, alors
- sinon



Méthode de Newton et la méthode de la sécante (hors programme)

Dans ces deux méthodes, on construit une suite récurrente (x_n) où x_0 est une première approximation d'une solution. Dans la méthode de Newton, on considère alors la tangente T à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ et on construit x_1 comme l'abscisse de l'intersection de T avec l'axe des abscisses.

On recommence la même construction avec x_1 pour obtenir x_2 . Cette méthode suppose que la fonction soit dérivable et qu'on puisse calculer sa dérivée et que sa dérivée ne s'annule pas.

Pour la condition d'arrêt on peut considérer qu'on s'arrête lorsque $|x_{n+1} - x_n|$ est plus petit qu'un certain seuil de tolérance.

Dans la méthode de la sécante, au lieu de construire x_{n+1} à partir de la tangente (qui nécessite le calcul de la dérivée), on utilise la sécante, c'est à dire la droite (AB) où $A(x_{n-1}; f(x_{n-1}))$ et $B(x_n; f(x_n))$.

