Il sera particulièrement tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction. Toute réponse doit être clairement justifiée.

À rendre le 11 janvier 21

Exercice 1

On considère la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = e^x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

3. (a) Détrminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

(b) En déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 2

On considère un réel $u_0 \in]0;1[$ et k un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$$

A. On introduit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = kx(1-x)$.
Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $[0;1]$.

B. Dans cette partie, on suppose que $k = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \leq x$.

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine limite ℓ

4. Montrer que ℓ, vérifie l'équation $\ell = \frac{1}{2}\ell(1-\ell)$. En déduire la limite de la suite (u_n).

C. Dans cette partie, on suppose que $k = 2$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $f(x) \geq x$.

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

(c) Reprendre les questions B.3 et B.4 précédentes, pour conclure que la suite converge vers un nombre réel ℓ que l'on déterminera.

Exercice 3

On considère une urne contenant 8 boules, indiscernables au toucher :

— 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 ;

— 3 boules noires, numérotées de 6 à 8.

1. On tire 5 boules successivement, *avec remise*.

(a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?

(b) Calculer le nombre de tirages tels que la première boule tirée est blanche et la deuxième une noire.

(c) Calculer le nombre de tirages tels que la première boule *noire* tirée soit en troisième position.

2. Reprendre la question 1 (a,b et c), dans le cas où le tirage est *sans remise*.

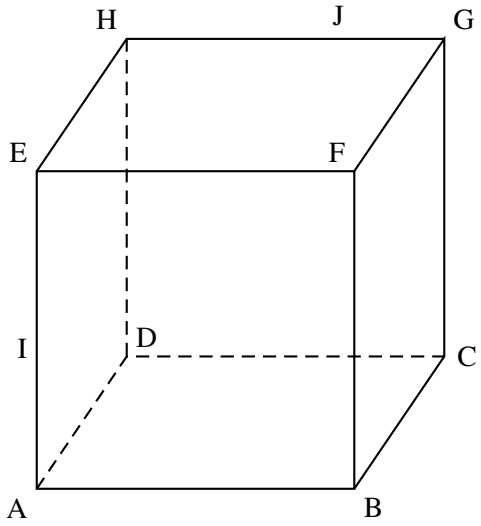
3. Dans cette partie, on extrait simultanément 2 boules.

(a) Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient noires.

(b) Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient de même couleur ?

Exercice 4

Dans la figure ci-contre, on considère le cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu de l'arête $[EA]$ et J un point situé sur l'arête $[GH]$ (voir la figure).



1. Refaire la figure et construire, *en justifiant votre construction*, les points suivants :

(a) Le point M, l'intersection de (HI) et le plan (ABC).

(b) Le point N, l'intersection de (IJ) et le plan (ABC).

2. Construire, en justifiant, l'intersection de (BH) avec le plan (BIJ).

3. Construire, en justifiant, la section du cube par le plan (BIJ).

Exercice 5

Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée $ABCD$. Le point O est le centre de $ABCD$ J est le milieu de $[SO]$ et K est tel que

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$$

1. **a)** Démontrer que

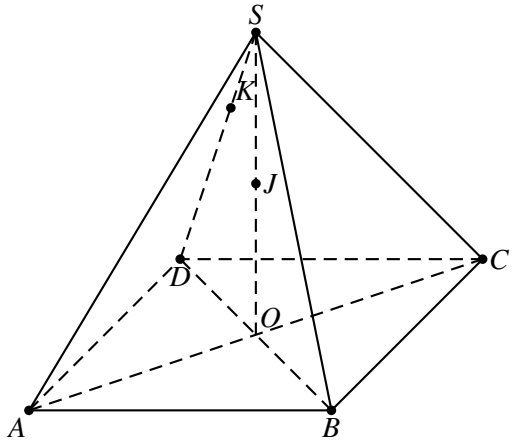
$$\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$$

b) Justifier que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)$. En déduire que

$$\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$$

c) Montrer que B, K et J sont alignés.

2. Construire la section de la pyramide avec le plan (BJC).



Dates à retenir :

— **Parcoursup** : ouverture du site pour information le 21/12/20 :
https://www.parcoursup.fr.
Saisie des vœux de 20/01/21 au 11/03/21. Confirmation et finalisation avant le 08/04/21.

— **Journée du lycéen (UGA) en distanciel** : mardi 26 janvier 2021.